

山东大学

二〇一八年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 829 科目名称 量子力学

(答案必须写在答卷纸上, 写在试题上无效)

一、计算 (25 分)

已知一维运动的粒子在态 $\psi(x)$ 中坐标 x 和动量 $\hat{p}$ 的平均值分别为 x_0 和 p_0 ,

求在态 $\varphi(x) = e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} \psi(x + x_0)$ 中 x 和 $\hat{p}$ 的平均值

二、计算 (25 分)

一维无限深方势阱, 质量为 μ 的粒子在一维无限深方势阱中运动, 势阱可表示为

$$V(x) = \begin{cases} 0; & x \in (0, a) \\ \infty; & x \notin (0, a) \end{cases}$$

- (1) 求解能量本征值 E_n 和归一化的本征函数 $\psi_n(x)$;
- (2) 若已知 $t = 0$ 时, 该粒子态为 $\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x))$, 求 t 时刻该粒子的波函数;
- (3) 求 t 时测量到粒子的能量分别为 E_1 和 E_2 的几率;
- (4) 求 t 时粒子的平均位置 $\langle x \rangle$ 和平均能量 $\langle E \rangle$ 。

三、证明 (25 分)

定义角动量升降算符 $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ 。

- (1) 证明算符 $\hat{J}_+$ 与 $\hat{J}_-$ 的厄密性, 并求出它们的本征态与本征值;
- (2) 若力学量算符 $\hat{F}$ 满足对易关系 $[\hat{F}, \hat{J}_{\mu}] = 0, (\mu = x, y, z)$, 试证: $\hat{F}$ 在 $\hat{J}^2, \hat{J}_z$ 共同本征态上的平均值与磁量子数无关。

四、计算 (25 分)

粒子束缚在一维势场 $V(x)$ 中运动, 能级为 $E_n^0, (n=1, 2, 3, \dots)$, 本征波函数为 $|n\rangle$, 受到微扰

$H' = \frac{\lambda}{\mu} \hat{p}_x$ 的作用, 其中 μ 是粒子质量, λ 是常数, p_x 为粒子动量,

- 1) 证明: $\langle n | \hat{p}_x | m \rangle = \frac{i\mu}{\hbar} (E_n^0 - E_m^0) \langle n | x | m \rangle$
- 2) 由此推导: $\sum_n (E_n^0 - E_m^0)^2 |\langle n | x | m \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{\mu^2} \langle m | \hat{p}_x^2 | m \rangle$
- 3) 证明: $\sum_n (E_n^0 - E_m^0) |\langle n | x | m \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}$
- 4) 在二级近似下, 证明第 n 个能级能量表示为: $E_n = E_n^0 - \frac{\lambda^2}{2\mu}$

(提示: $[x, H_0] = \frac{i\hbar}{\mu} \hat{p}_x$)

五、计算题 (共 25 分)

假设两自旋系统的哈密顿量为 $\hat{H} = B(\hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z}) + J\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2$ 。指标 1 表示自旋 1, 指标 2 表示自旋 2。两自旋波函数可表示为自旋 1 与自旋 2 直积的形式: $\chi_1 = |+\rangle|+\rangle, \chi_2 = |-\rangle|-\rangle, \chi_3 = |+\rangle|-\rangle, \chi_4 = |-\rangle|+\rangle$ 。

- (1) 求在此表示下, 哈密顿量 $\hat{H}$ 的矩阵表示: $H_{ij} = \langle i | \hat{H} | j \rangle$;
- (2) 波函数可表示为

$$\psi = a\chi_1 + b\chi_2 + c\chi_3 + d\chi_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

求解 $\hat{H}$ 的本征值与本征函数:

- (3) 假设 $B = 0, J > 0$, 求两自旋系统的基态能及对应的基态波函数。

六、计算题 (共 25 分)

两个无相互作用的粒子置于一维无限深方势阱 ($0 < x < a$) 中。对于以下两种情况, 写出两粒子体系可具有的两个最低能量值, 相应的简并度, 以及上述能级对应的所有二粒子波函数:

(1) 两个自旋为 $1/2$ 的可区分粒子;

(2) 两个自旋为 $1/2$ 的全同粒子。