

山 东 大 学

二〇一七年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651 科目名称 数学分析

(答案必须写在答卷纸上, 写在试题上无效)

一、计算与证明题 (共 2 题, 每题 15 分)

1、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

2、证明函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在区间 $(-1, 0)$ 上是一致连续的, 但在区间

$J = \{x | 0 < |x| < 1\}$ 上并非一致连续.

二、证明题 (共 2 题, 每题 10 分)

1、证明不连续的函数 $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ 于区间 $[0, 1]$ 上可积分.

2、证明函数 $f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|$ ($x \neq 0$) 及 $f(0) = 0$ 在点 $x = 0$ 的任何邻域上有

不可微分的点, 但在 $x = 0$ 这点是可微分的.

三、计算与证明题 (共 2 题, 每题 15 分)

1、证明不等式 $yx^y(1-x) < e^{-1}$,

其中 $(x, y) \in D = \{(x, y) | 0 < x < 1, y > 0\}$.

2、计算 $\int y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 L 是曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} \quad (z \geq 0, a > 0), \text{ 若从 } x \text{ 轴正向看去, 此曲线是沿逆时针}$$

方向运行的.

四、证明题 (20 分)

设函数 $f(x, y) = \varphi(|xy|)$, 其中 $\varphi(0) = 0$, 且在点 $u = 0$ 的近旁满足

$|\varphi(u)| \leq u^2$, 试证: 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

五、计算与证明题 (共 2 题, 每题 15 分)

1、计算积分 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \right) \frac{dx}{\cos x}$, 其中 $(|a| < 1)$.

2、设 $f(x)$ 对一切 b ($0 < b < +\infty$) 在 $[0, b]$ 上可积, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$,

证明: $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = \alpha$.

六、计算题 (20 分)

设 $x \in [0, \pi]$, 试求如下级数之和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.