山 东 大 学

二〇一六年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 825　　　　科目名称 线性代数与常微分方程

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上无效）

一、计算题（共 2 题，第 1 题 20 分，第 2 题 10 分）

1.设 $\alpha_1=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\alpha_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right),\alpha_3=\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(1)求一个正交阵以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为前 3 列;

(2)这样的正交阵共有几个？

2.设 A 为 n 阶可逆的反对称矩阵，β 为 n 元列向量，$B=\begin{pmatrix} A & \beta \\ -\beta^T & 0 \end{pmatrix}$，求矩阵 B 的秩 $r(B)$.

二 、证明题（共 3 题，每题 10 分）

设 f 是 n 维向量空间 V 的一个线性变换，且 f 是幂等的，即 $f^2=f$，证明：

1.$\ker f=\{x-f(x)\mid x\in V\}$;

2.$V=\ker f\oplus \mathrm{Im}\, f$;

3.若 g 是 V 的一个线性变换，则 $\ker f$ 和 $\mathrm{Im} f$ 都是 g 的不变子空间当且仅当 f 与 g 可交换，即 $fg=gf$.

三 、证明题（共 3 题，每题 10 分）

1. 设 A,B 为 n 阶实对称阵且 A 是正定的，证明存在 n 阶实可逆阵 P 使 P^TAP 与 P^TBP 都是对角阵。

2. 设 A,B 为 n 阶正定阵，且方程 $|xA-B|=0$ 的根全是 1，证明 $A=B$.

3. 设 A 是 $n\times s$ 矩阵，证明在实数域上，A^TA 必为半正定阵；若 A 的列向量线性无关，则 A^TA 为正定阵。

四、计算下列各题（共 3 题，共 40 分）

1. （10 分）求方程 $(y')^2-2xy'+1=0$ 的通解。

2. （10 分）求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$ 的通解。

3. （20 分）求方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y-z, \\ \dfrac{dy}{dt}=y-x+z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x-z \end{cases}$ 的通解。

五、证明下列各题（共 2 题，每题 10 分）

1. 证明方程 $\dfrac{dx}{dt}=x^2+t^2$ 任一解的存在区间都是有界的。

2. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内是 y 的不增函数，试证初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的右行解 $(x\ge x_0)$ 至多只有一个。