山 东 大 学

二〇一七年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 825 科目名称 线性代数与常微分方程

（请将所有试题答案写在答题纸上，写在试题上无效）

一、每小题 10 分，共 30 分。

1. 计算：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{2017}$.

2. 设 A 是 $m\times n$ 复矩阵，X 是 $n\times m$ 未知数矩阵。证明：矩阵方程 $AXA=A$ 恒有解。

3. 设 n 阶方阵 $J=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，即每个位置元素均为 1. 求其若尔当（Jordan）标准形。

二、共 30 分，第 1 小题 20 分，第 2 小题 10 分。

1. 设 A 为 n 阶矩阵且不可逆，A^* 为 A 的伴随矩阵，I 为 n 阶单位阵，A^* 的迹 $\mathrm{Tr}A^*=a\neq 0$，

求：(1) 矩阵 A 的秩 $r(A)$；　(2) $|\lambda I-A^*|$.

2. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的 n 个特征值，求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值.

三、共 30 分，第 1 小题 10 分，第 2 小题 20 分。

1. 设 A,B,C 为 n 阶方阵，且 $A=BC$，如果 $B^2=B$，$C^2=C$，

证明：$r(E-A)\leq 2n-2r(A)$，其中 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

2. 设 φ 是线性空间 V 的一个线性变换，且 $\varphi^2=\varphi$. 令

$$V_1=\{\alpha\in V|\varphi(\alpha)=\alpha\},\ V_0=\{\alpha\in V|\varphi(\alpha)=0\},$$

证明：(1) V_0,V_1 是 V 的线性子空间。(2) $V=V_1\oplus V_0$.

四、共 40 分

1. （10 分）求方程

$$(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$$

的通解。

2. （10 分）求方程

$$x''+x=1-\frac{1}{\sin t}$$

的通解。

3. （20 分）求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+5x+y=0, \\ \dfrac{dy}{dt}-2x+3y=0 \end{cases}$$

的通解。

五、每题 10 分，共 20 分

1. 设 $f(x,y)$ 在整个平面上连续有界，且 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 也是连续的. 试证方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的每个解 $y=\varphi(x)$ 在整个实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上存在。

2. 设 $f(t,x)$ 在整个平面上都有定义，连续且有界，有关于 x 的连续的一阶偏导数，证明方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

的任一解均可延拓到整个区间 $(-\infty,+\infty)$.