山 东 大 学

二〇一五年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 825　　　　科目名称 线性代数与常微分方程

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上无效）

一、计算题（共 3 题，每题 10 分）

1. 求 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ 的秩。

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,求 A 的若尔当标准型 J，并求出 P，使 $P^{-1}AP=J$.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X^TAX$ 的正惯性指数为 1，又矩阵 A 满足 $A^2-2A=3I$，求此二次型的规范形。

二 、证明题（共 2 题，第 1 题 20 分，第 2 题 10 分）

1.设方程组 $AX=0$,其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$，记 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 中划去第 i 列得到的 $n-1$ 阶子式，令 $\alpha=(M_1,-M_2,\cdots(-1)^{n-1}M_n)^T$

（1）证明 α 是 $AX=0$ 的一个解；

（2）若 $r(A)=n-1$，则 $AX=0$ 的通解为 $k\alpha, k\in R$.

2.设 V_1，V_2，$\cdots$，V_m 是数域 F 上向量空间 V 的 m 个真子空间，证明：在 V 中必存在一个向量 α，它不属于任何一个 V_i.

三 、（共 3 题，每题 10 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交列向量组，k 为实数，矩阵 $H=I-k\alpha_1\alpha_1^T$.

1.证明：α_1 是 H 的特征向量，并求出对应的特征值。

2.证明：$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 也是 H 的特征向量，并求出对应的特征值。

3.当 $k<1$ 时，证明：H 为正定阵。

四、计算题（共 3 题，第 1, 2 题每题 10 分，第 3 题 20 分）

1、求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y+1}{4x+2y-3}$.

2、求解隐式微分方程 $y=(y')^2-xy'+\dfrac{x^2}{2}$.

3、求解微分方程 $y''-4y'+4y=e^{2x}+\cos 2x$.

五 、证明题（共 2 题，每题 10 分）

1、证明齐次方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 有积分因子 $\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$.

2、设方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2f(y)$ 中，$f(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，且 $yf(y)<0$ （$y\neq0$）.

证明：该方程的任一满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y(x)$ 必在区间 $[x_0,+\infty)$ 上存在.