山 东 大 学

二〇一四年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 829 科目名称 量子力学

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上无效）

一、证明题（共 25 分）

对一个系统，物理量算符 $\hat{A}$ 与 $\hat{H}$ 不对易，其有本征值为 a_1, a_2，相应的本征态为

$$\phi_1 = \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}}, \quad \phi_2 = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}},$$

这里 u_1, u_2 为 $\hat{H}$ 的本征函数，相应的本征值为 E_1 与 E_2，若系统的初态为 $\phi_1(t=0)$，证明 $\hat{A}$ 在 t 时刻的平均值为

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar}$$

二、计算（共 25 分）

一个质量为 μ 的粒子在某势场 $V(\varphi)$ 的约束下作圆周（周长为 L）运动，如果还存在 δ 函数势 $V(\varphi) = a\delta(R(\varphi - \pi))$，请求出系统所有能级和相应的归一化波函数。

三、计算（共 25 分）

粒子处于状态

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{x^2}{4\xi^2}\right)$$

式中 ξ 为常量，求粒子的动量平均值，并计算测不准关系 $\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p)^2} = ?$

（备用公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

）

四、计算（共 25 分）

考虑处于长为 0.1nm 的“一维盒子”中的一个电子。(1) 求前 4 个波函数并绘草图(将波函数归一化)。(2) 计算对应的 4 个能级并画出能级图。(3) 在 t=0 时，粒子处于 n=1 的态。此时突然加上一个 $V_0 = -10^4 eV$，宽度为 $10^{-12} cm$，中心在 $a/2$ 的方势阱，保持 $5\times10^{-18} s$ 后撤去。在这个微扰移掉后，体系被发现处于 $n=2$，$n=3$，$n=4$ 态的概率是多少(势阱的高度和宽度对于中子与电子相互作用是特征性的)？

注意 可用所画的图帮助估计有关的矩阵元。

五 、计算题（共 25 分）

两个自旋为 1/2 的非全同粒子体系。以 $|+\rangle, |-\rangle$ 分别代表自旋向上，下两个量子态。在 $t=0$ 时体系波函数为 $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|++\rangle + \frac{1}{2}|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|--\rangle$。体系的哈密顿量为 $\hat{H} = \omega_1 \hat{S}_{1z} + \omega_2 \hat{S}_{2z}$。（1）求 t 时刻波函数；（2）求 t 时刻的平均值：$\langle s_{1x} \rangle$ 与 $\langle s_{1y} \rangle$。

六 、计算题（共 25 分）

设有一个质量为 m，能量为 E 的粒子在球对称势 $B\delta^3(r-a)$ 上散射，其中 B 和 a 都是常数. (1) 在散射能量很高的情况下，用 Born 近似计算微分散射截面. (2) 在甚低能散射的情形，$\lambda > a$，微分散射截面为何？