山 东 大 学

二〇一八年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 825　　科目名称 线性代数与常微分方程

（请将所有试题答案写在答题纸上，写在试题上无效）

一、共 30 分，第 1 小题 20 分，第 2 小题 10 分。

1.设 R^3 中的两组基为 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 与 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

（1）求从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过度矩阵 P.

（2）试确定一个向量，使它在这两组基下有相同的坐标。

2.设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

可经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为 $y_2^2+4y_3^2$，求 a,b 的值及正交变换矩阵 Q.

二、共 30 分，第 1 小题 10 分，第 2 小题 20 分。

1.设 V 是数域 P 上的线性空间，W 是 V 的一个子空间，取 $\alpha_1,\alpha_2\in V$，令

$$W_1=\alpha_1+W,\quad W_2=\alpha_2+W,$$

试讨论 W_1 与 W_2 的关系。

2.设 $A\in R^{n\times n}$，

（1）证明与 A 可交换的矩阵构成 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 的一个子空间，记作 $\mathrm{C}(A)$.

（2）当 $A=diag\{1,2,\cdots,n\}$ 时，求 $\mathrm{C}(A)$ 的维数与一组基。

三、每小题 10 分，共 30 分。

1.证明：全体正实数 R^+ 关于如下定义的加法 $\oplus$ 和数乘 $\circ$：

$$a\oplus b=ab,\quad k\circ a=a^k,\quad \forall a,b\in R^+,k\in R.$$

作成实数域 R 上的一个线性空间。

2.把实数域看 R 作是自身上的一个线性空间，证明 R^+ 与 R 同构，并写出一个同构映射。

3.求 R^+ 的维数与一组基。

四、共 40 分。

1. （10 分）求方程 $x^2y'=x^2y^2+xy+1$ 的通解。

2. （10 分）求 $y''+2ay'+a^2y=\mathrm{e}^x$ 的通解。

3. （20 分）求解方程组 $\begin{cases} t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x+ty, \\ t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x+ty. \end{cases}$

五、每题 10 分，共 20 分。

1. 设微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(y)$，其中 $f(y)$ 在 $y=a$ 的某邻域 $|y-a|\leqslant\varepsilon$ 上连续，而且当且仅当 $y=a$ 时 $f(y)=0$. 若过直线 $y=a$ 上的每一点，方程的解都是局部唯一的，证明：瑕积分 $\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\dfrac{\mathrm{d}y}{f(y)}\right|=+\infty$.

2．设 $p(x),q(x),f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 满足条件 $y(0)=y(1)=0$ 的解唯一的充要条件是齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 只有零解满足 $y(0)=y(1)=0$.